Leon Henkin: un centenario, y un encuentro fortuito entre Francisco Miró Quesada y Juan Bautista Ferro

Día Mundial de la Lógica, Lima 2021

José Carlos Cifuentes
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná – Brasil
jccifa@gmail.com

Resumen

- El norteamericano Leon Henkin (1921-2006) fue uno de los lógicos más renombrados del siglo XX, junto con Alfred Tarski y Kurt Gödel, y una de sus principales contribuciones a la lógica fue la demostración más simple y heurísticamente fructífera del **teorema de completitud de la lógica de predicados de primer orden**. Henkin extendió esa demostración para el caso de la lógica de predicados de segundo orden probando también su completitud pero a costas de una interpretación *no standard* de los cuantificadores de segundo orden, pues, para la interpretación *standard*, Gödel ya había probado su incompletitud. Esa interpretación *no standard* exige modificar el entendimiento de cuál es **el papel de la teoría de conjuntos en la relación entre lógica y matemáticas**, uno de los problemas lógicos y filosóficos más importantes después del logicismo de Frege y Russell. En la década de 1960, Francisco Miró Quesada y Juan Bautista Ferro tuvieron un encuentro fortuito y discutieron sobre ese problema.

Introducción

Tarski y Gödel en Viena 1935

- El **Día Mundial de la Lógica** fue instituido oficialmente por la UNESCO en 2019 para ser conmemorado cada año el 14 de enero en homenaje a **Alfred Tarski** (1901-1983) nacido en fecha 14 de enero y a **Kurt Gödel** (1906-1978) fallecido en fecha 14 de enero, dos de los más importantes lógicos-matemáticos del siglo XX, por sus relevantes contribuciones para la consolidación de la moderna Lógica Matemática, especialmente de la **Teoría de Modelos**.

El norteamericano **Leon Henkin** (1921-2006), cuyo centenario celebramos en 2021, fue otro de los grandes nombres en el campo de la lógica matemática, que también contribuyó, a lo largo de su carrera y con su visión de lógico, al campo de la Educación en Matemática y en Lógica.

Su resultado más conocido en lógica es la versión semántica más simple y también pedagógicamente adecuada del **(meta)teorema de completitud** de la lógica de predicados de primer orden, el cual trataremos en forma sintética en esta conferencia, así como de algunas de sus ramificaciones.

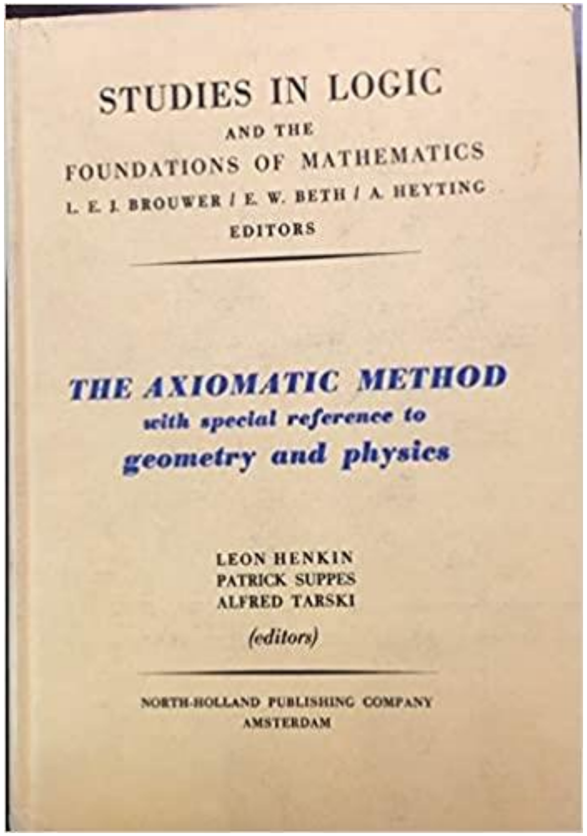
Leon Henkin, un breve perfil

- El nombre completo de Leon Henkin era Leon Albert Henkin, y se cuenta que el segundo nombre Albert le fue dado por su padre, que era interesado en ciencias, debido a la admiración que este tenía por Albert Einstein.
- Leon nació en Nueva York en 1921 e hizo su pregrado en Matemática y Filosofía en la Universidad de Columbia, graduándose en 1941. Posteriormente obtuvo su magister en Matemática en 1942 y su doctorado, en 1947, ambos en la Universidad de Princeton con la tesis *The completeness of formal systems* asesorado por **Alonzo Church** (1903-1995), también un lógico renombrado que acuñó su nombre en uno de los (meta)teoremas más fundamentales de la lógica matemática, el de **indecidibilidad** de la lógica de predicados de primer orden (resultado que tiene implicaciones en las teorías de computabilidad y procedimientos decisorios).
- De 1949 a 1953 fue profesor asistente en la *University of Southern California* y a partir de 1953, y hasta su retiro en 1991, fue profesor en el Departamento de Matemática de la *University of California* en Berkeley, universidad que le otorgó el diploma de **Profesor Emérito** en ese año. En Berkeley fue invitado por Tarski para colaborar con el *Group in Logic and the Methodology of Science* dirigido por él en el Departamento de Matemática desde su ingreso como profesor en esa universidad en 1942, y fue también un reconocido **divulgador**, a través de su docencia y sus publicaciones, de la lógica y sus métodos, además de haber sido Director de Departamento en los períodos 1966-1968 y 1983-1985..

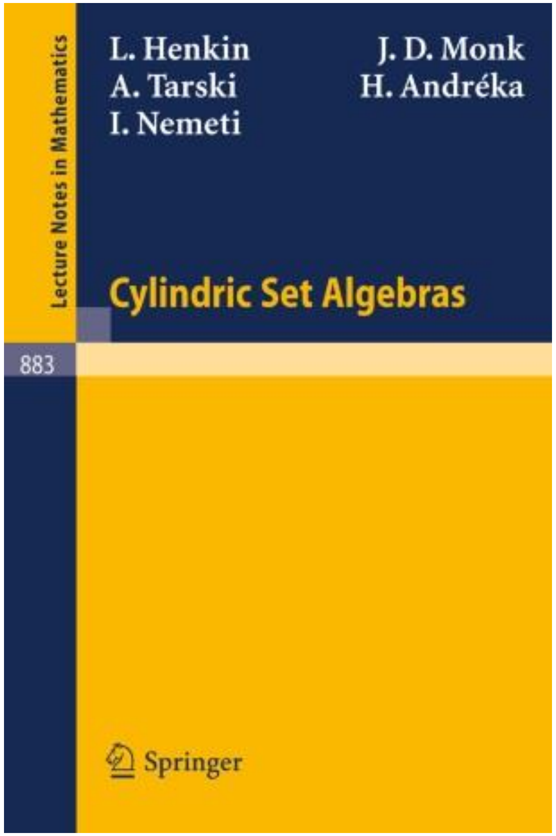
- Henkin fue miembro de la *Association for Symbolic Logic*, siendo su Vicepresidente de 1952 a 1954, y su Presidente de 1962 a 1964.
- Además se desempeñó como consultor de la *National Science Foundation* y de la *National Academy of Science*.
- En el campo de la **Educación Matemática** fue miembro de la *Mathematical Association of America* formando parte del *Committee of Educational Media* para la divulgación de la ciencia y de la matemática. En 1980 fue organizador, en Berkeley, del *4º International Congress on Mathematical Education*, y de 1980 a 1984 fue Jefe de la *U. S. Commission on Mathematical Instruction*.
- Como profesor-investigador, Henkin asesoró 9 tesis de doctorado de las cuales 4 fueron en Lógica Matemática y 5 en Educación Matemática. Además supervisó varios **posdoctorados** entre los cuales cabe destacar los de **Newton Da Costa** de Brasil y **María Manzano** de España.

Henkin como colaborador de Tarski

Una nueva visión del método axiomático a partir de la teoría de modelos

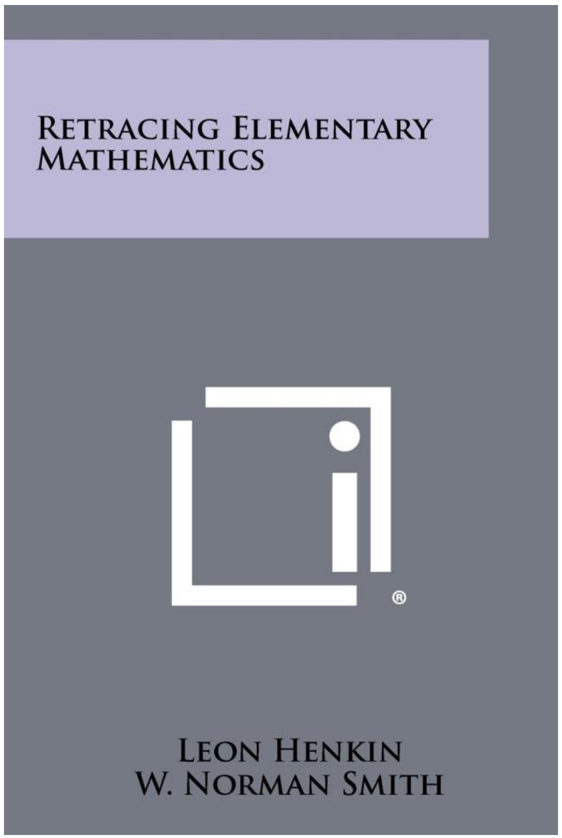


Métodos de algebrización de sistemas lógicos con cuantificadores



Henkin y la educación en matemática y en lógica

Una mirada retrospectiva sobre la Matemática Elemental (años 60)



Leon Henkin y Mara Manzano en Barcelona en 1982, un encuentro educacional

Mara Manzano y Leon Henkin

- María Gracia Manzano Arjona (1950-) es profesora de Lógica y Filosofía de la Ciencia en la Facultad de Filosofía de la Universidad de Salamanca y especialista en teoría de modelos. Hizo el doctorado en la Universidad de Barcelona bajo la supervisión de Jesús Mosterín (1941-2017) con su tesis «Modelos generales de la lógica de segundo orden» (1977), y el **posdoctorado con Leon Henkin** en la Universidad de California en Berkeley (1977-1978), considerándolo, desde entonces, su guía y mentor en la enseñanza y en la investigación. Algunas de sus **publicaciones sobre Henkin** son:
- M. Manzano y E. Alonso. *Completeness: from Gödel to Henkin*. History and Philosophy of Logic 35(1), 2014, p. 1-26.
- M. Manzano, I. Sain y E. Alonso (Eds.). **The life and work of Leon Henkin**. Birkhäuser, 2014.
- M. Manzano y E. Alonso. *Visions of Henkin*. Synthese 192(7), 2015, p. 2123-2130.
- M. Manzano, N. Movshovitz-Hadar y D. Resek. *Leon Henkin: a logician's view on mathematics education*. IFCoLog Journal of Logic and its Applications, vol. 4, no. 1, 2017, p. 83-109.

El teorema de completitud de Henkin

- El **teorema de completitud de la lógica de predicados de primer orden** dice esencialmente que **proposiciones lógicamente válidas** y **proposiciones demostrables** (escritas en un lenguaje de primer orden) coinciden. Eso fue demostrado inicialmente por **Gödel en 1930** como parte de su tesis de doctorado, basándose en el sistema lógico desarrollado por Russell y Whitehead en su *Principia Mathematica* de 1910-1913, y usando las llamadas formas normales de Skolem, además de adoptar la clasificación de las proposiciones en primer orden y en orden superior introducida por Hilbert y Ackermann en 1928 en su libro «Elementos de lógica teórica».
- El principal resultado por el cual Gödel es más conocido es el de **incompletitud de sistemas lógicos que puedan expresar la aritmética de Peano**, en particular, **de las lógicas de orden superior** (obsérvese que la aritmética de Peano es un sistema axiomático de segundo orden).
- La versión de Henkin del teorema de completitud, publicada en 1949, es una versión no constructiva y más fuerte que la de Gödel y, del punto de vista tanto científico cuanto pedagógico, tiene un **fuerte potencial heurístico** permitiendo su generalización para otros sistemas lógicos, en particular los de segundo orden (publicado en «Completeness in the theory of types», 1950).
- Como nos cuenta el mismo Henkin, una primera versión de la completitud, y para el **sistema proposicional clásico**, se debe al ruso-polaco-norteamericano **Emil Post** (1897-1954) que en su tesis de doctorado de 1920 introdujo el **método de las tablas de verdad**, inclusive generalizándolo para ciertas lógicas polivalentes, demostrando, por ese método, su completitud. Ese trabajo fue publicado en 1921. Ese año fue excepcional, en ese año también aparece por primera vez el *Tractatus Logico-Philosophicus* de Wittgenstein.

Semblanza de un lógico peruano en su centenario (2020)

Juan Bautista Ferro (1920-1993)

- Como fue anunciado en el título de esta conferencia, trataremos de un encuentro fortuito entre los más importantes lógicos peruanos del siglo XX, Francisco Miró Quesada Cantuarias y Juan Bautista Ferro Porcile. Solo presentaremos al segundo por ser un poco menos conocido y divulgado que el primero.
- Ferro fue uno de los filósofos más destacados del siglo XX en el Perú, interesado principalmente en Filosofía Moderna, y una de sus más importantes contribuciones la realizó en el campo de la lógica contemporánea y su enseñanza, como veremos.
- Nació en 1920 y sus estudios universitarios los realizó en Derecho en San Marcos, graduándose en 1943. Posteriormente realizó sus estudios de doctorado en Filosofía y en Letras en los años 50 obteniendo su grado de Doctor en 1966 con su destacada tesis «**Procedimientos decisorios para fórmulas monádicas de primer grado**». Ese trabajo se encuadra en el problema de encontrar procedimientos de decisión para la validez de fórmulas de primer orden monádicas en contraste con el resultado de 1936 de **Alonzo Church**, asesor de la tesis de Henkin como ya vimos, de que tales procedimientos no existen en general para fórmulas de primer orden no monádicas.
- Ferro fue profesor en la Facultad de Filosofía y Letras de San Marcos desde 1958 hasta su cese en 1983, y esa universidad le concedió el título de **Profesor Emérito** en 1986. Además, recibió el **Premio Nacional de Cultura «Alejandro Deústua»** en el área de Filosofía en 1968.
- Ferro, desde 1960 en que se hizo cargo de los cursos de Lógica en San Marcos, y siendo un estudioso de los nuevos enfoques en lógica, especialmente los desarrollados por Willard van Orman Quine, introdujo en esos cursos una sistematización moderna dando énfasis a los procedimientos instrumentales de esa disciplina, especialmente de la lógica clásica de primer orden y de la lógica jurídica.

Un pensamiento pedagógico de Ferro acerca de la lógica

- ***«Desde el punto de vista de la enseñanza, asimismo, la utilización de algoritmos decisorios en un curso de nivel elemental o medio no parece reportar sino beneficios, pues, con todo lo elegante que pueda ser la técnica de derivación formal – cuya importancia nadie discute – , ésta exige al estudiante un apreciable grado de familiaridad con técnicas simbólicas e indispensables dotes personales».*** (Tesis, 1966, p. iii)

En un homenaje de San Marcos a sus «profesores-maestros»

La «concepción» de lógica de Ferro en el recuerdo de Francisco Miró Quesada: un encuentro fortuito

- De ***Conversaciones con Juan Bautista Ferro***, *Areté*, Revista de Filosofía, vol. VII, no. 2, 1995, p. 375-381.
- «***Algunos días después de su grado de doctor, en que presentó su admirable y famosa tesis sobre la decidibilidad de las fórmulas monádicas de primer orden, nos encontramos, creo que en Miraflores, y comenzamos a hablar sobre la esencia de la lógica. Mi punto de vista era que la lógica no debía abarcar la teoría de los conjuntos. Pero él pensaba lo contrario. Para mí, en aquella época, la lógica debía ser absolutamente general, es decir, no debía contener entre sus temas, ninguna 'materia'. Ferro sostenía que una buena parte de la teoría de los conjuntos (hoy diríamos: la teoría clásica de los conjuntos) era tan general que, en esencia, no podía diferenciarse de la lógica. Le dije que la teoría de los conjuntos solo podía considerarse como lógica cuando se limitaba a ser una teoría [abstracta] de los conjuntos booleanos. Mas él replicó que la lógica de segundo orden era, en el fondo, una teoría de los conjuntos pues, al cuantificar sobre los predicados, se está presuponiendo la existencia del universo de conjuntos [comparar con la interpretación conjuntista de la lógica de segundo orden de Henkin que veremos a continuación]. Mi posición hoy día ha cambiado, y considero que ninguno de los dos teníamos razón en aquella época. La conversación derivó, después, a la utilidad de la lógica para la filosofía …***».

La interpretación conjuntista de los cuantificadores de segundo orden: la problemática por tras de la discusión entre Miró Quesada y Ferro

- Uno de los problemas filosóficos más importantes en los fundamentos de la matemática desde Frege y Russell, pasando por Quine hasta, por lo menos, los años 60, era el de la **relación entre matemática y lógica**, siendo la propuesta más discutida la del llamado «**logicismo**» que proponía que toda la matemática podía ser reducida a la lógica.
- Un ingrediente esencial en esa discusión era determinar si la teoría de conjuntos desarrollada por Cantor a finales del siglo XIX, o en alguna de sus versiones posteriores, era de naturaleza lógica o no.
- Esa discusión entraba, en forma natural, en la determinación de la ontología de los cuantificadores en la lógica de segundo orden, debido a su llamada **interpretación *standard*** que es la siguiente:

- **Interpretación *standard*** de los cuantificadores de segundo orden:

Si U es un determinado **dominio de interpretación de las variables cuantificables** del lenguaje (que pueden ser de primer o de segundo orden), y X es una variable de segundo orden, es decir que varía sobre subconjuntos del dominio, entonces, para cualquier predicado (monádico) F en donde X ocurra, y siguiendo los lineamientos de la **concepción de verdad de Tarski**, se decreta que:

$$(\forall X)F(X) \text{ es verdadera en } U \Leftrightarrow \text{para todo } S \subseteq U\text{: } F(S)\text{, y}$$

$$(\exists X)F(X) \text{ es verdadera en } U \Leftrightarrow \text{existe } S \subseteq U\text{: } F(S).$$

Es claro que podemos sustituir $\boldsymbol{S \subseteq U}$ por $\boldsymbol{S \in \wp(U)}$, siendo $\wp(U)$ el llamado conjunto potencia de U, es decir, la colección de **todos los subconjuntos de *U***.

- Como ya mencionamos, Gödel probó la incompletitud de la lógica de segundo orden a respecto de esa interpretación *standard.* Más adelante Henkin hizo un aporte esencial a esa discusión: introdujo una **interpretación generalizada (*no standard*) de los cuantificadores de segundo orden** en contraposición a su interpretación *standard*, consiguiendo, con eso, demostrar la completitud de la lógica de segundo orden a respecto de esa nueva interpretación.

Interpretación generalizada de Henkin

- Para los cuantificadores de segundo orden:

Si en las cláusulas anteriores sustituimos $\wp(U)$ por una **subcolección** fija $\Im$ de $\wp(U)$, obtenemos lo que se llama **interpretación generalizada** de los cuantificadores de segundo orden cuyas cláusulas son las siguientes:

$(\forall X)F(X)$ es verdadera en U (a respecto de $\Im$)

$\Leftrightarrow$ para todo $S \in \Im$: $F(S)$, y

$(\exists X)F(X)$ es verdadera en U (a respecto de $\Im$)

$\Leftrightarrow$ existe $S \in \Im$: $F(S)$.

En ese sentido, se dice que una fórmula de segundo orden tiene **modelo *no standard*** a respecto de la interpretación generalizada de sus cuantificadores si existe un dominio de interpretación U ($\neq \emptyset$) y una familia $\Im \subseteq \wp(U)$, tal que la fórmula es verdadera en U a respecto de $\Im$, o que **el par $(U, \Im)$ es modelo de esa fórmula**. En el caso en que $\Im = \wp(U)$ diremos que el modelo es *standard*.

- Esas dos interpretaciones estudiadas por Henkin le permitieron demostrar, también, que la lógica de segundo orden es incompleta a respecto de la interpretación *standard* (como ya lo había hecho Gödel), pero se torna **completa a respecto de la interpretación generalizada**.
- El teorema central en la demostración de esa completitud, como justificaremos más adelante, es el llamado **teorema de existencia de modelos**, que afirma que si Γ es una **colección consistente** de fórmulas de segundo orden, existe un «**modelo generalizado**» de Γ, es decir, existe un dominio *U* y una colección $\mathfrak{I} \subseteq \wp(U)$ tal que **el par (U , $\mathfrak{I}$) es modelo de toda fórmula de Γ**.
- La existencia de un modelo para Γ consistente es siempre posible porque la semántica *no standard* de Henkin permite más modelos para realizar la verdad (en una acepción generalizada de «verdad») de las proposiciones de Γ que la semántica *standard*.
- De ahí, es claro que la completitud de la lógica de segundo orden depende de como entendamos el «**universo de los conjuntos y sus subconjuntos**». **Lógica de segundo orden es teoría de conjuntos en un sentido generalizado!**, lo que va al encuentro de las ideas de Ferro y su discusión con Miró Quesada.

De «¿Son la lógica y la matemática idénticas?» de Leon Henkin (1975, p. 87-88, original de 1962)

- ***«Ahora, con este bagaje, volvamos a la tesis de Russell según la cual toda la matemática puede reducirse a la lógica [el programa logicista]. Yo diría que si se entiende que la lógica incluye la teoría de conjuntos (lo cual parece ser una buena apreciación de lo que Russell tenía en mente) entonces la mayoría de los matemáticos aceptarían sin objeción la tesis de que los conceptos básicos de todas las matemáticas pueden expresarse en términos de la lógica. También estarán de acuerdo en que los teoremas de todas las ramas de la matemática pueden derivarse de principios de la teoría de conjuntos, aunque señalarán que ningún sistema fijo de axiomas para la teoría de conjuntos es adecuado para abarcar todos aquellos principios que serían considerados como 'matemáticamente correctos'».***

- *«Pero tiene quizás más hondo significado el consenso de los matemáticos de que en su disciplina hay mucho más que lo indicado por una tal reducción de la matemática a la lógica y la teoría de conjuntos. El hecho de que de entre todas las nociones lógicamente posibles, definibles en teoría de conjuntos, se seleccionen ciertos conceptos como objetos de investigación es de esencial significación. Una comprensión cabal de la matemática debe considerar una explicación sobre aquellas nociones conjuntistas que tienen «contenido matemático» y este es un problema que obviamente no es reducible a un problema de lógica no importa lo ampliamente que esta sea concebida».*

Hacia el teorema de completitud «a la Henkin» para los sistemas lógicos: un enfoque pedagógico

- Primero veremos el significado formal del teorema de completitud y luego esbozaremos los pasos principales de su demostración, en cualquier sistema lógico donde sea válido, siguiendo el método de Henkin.
- El estudio de todo sistema de lógica parte de la determinación de su **lenguaje formal** y tiene dos formas de ser abordado, la **forma semántica** y la **forma sintáctica**.
- El lenguaje de la lógica de primer orden monádica, por ejemplo, tiene como principal concepto el de **fórmula** (bien formada) o **proposición**, términos que usaremos como sinónimos.
- Una fórmula es una expresión bien formada que tiene como **vocabulario** los siguientes símbolos: 1) variables de primer orden x, y, z, etc. (con o sin subíndices) en una cantidad enumerable, 2) constantes individuales: *a*, *b*, *c*, etc. (con o sin subíndices), 3) conectivos lógicos: $\neg$ (negación) y $\rightarrow$ (condicional), 4) el símbolo de igualdad =, 5) símbolos para predicados monádicos constantes *F*, *G*, etc. (con o sin subíndices), y 6) **cuantificadores de primer orden** $\forall$ (para todo) y $\exists$ (existe).
- En un lenguaje de segundo orden precisamos, además, de variables de segundo orden *X*, *Y*, *Z*, etc., (que aquí consideraremos también predicados monádicos variables) y **cuantificadores de segundo orden** para los cuales usaremos los mismos símbolos $\forall$ y $\exists$.

Abordaje semántico y el concepto de «consecuencia semántica»

- La semántica es la relación que las fórmulas o proposiciones tienen con el «**mundo de sus interpretaciones o modelos**», y parte, en el caso de la lógica clásica (de primer o segundo orden), de la atribución de un universo de interpretación para sus símbolos.
- De aquí en adelante entenderemos fórmula o proposición como «fórmula sin variables libres» a menos que el contexto sugiera lo contrario.
- Si Γ es una colección cualquiera (finita o infinita) de fórmulas, diremos que **(U , $\mathfrak{I}$) es modelo de Γ** si (U , $\mathfrak{I}$) es modelo de todas las fórmulas de Γ.
- Sean Γ una colección cualquiera de fórmulas y A una fórmula, diremos que ***A* es consecuencia semántica de Γ** si todo modelo (U , $\mathfrak{I}$) de Γ es modelo de A. Eso será denotado por $\Gamma \vDash A$. Si $\Gamma = \varnothing$ diremos que A es una **fórmula válida** (que equivale al concepto de **tautología** en el caso proposicional), lo que denotaremos por $\vDash A$.
- La palabra «**consecuencia**» trae connotaciones que indican que ciertas fórmulas se siguen de otras por algún mecanismo cuya estructura formal será mejor analizada en el abordaje sintáctico que veremos a continuación.

Abordaje sintáctico y método axiomático

- En el abordaje semántico de la lógica proposicional clásica quedó delimitada la **clase de las proposiciones lógicamente válidas** y el concepto importante de «consecuencia semántica» que está en la raíz de la validez de las argumentaciones.
- El siguiente paso, del ponto de vista metodológico, es proveer a esa clase de un ropaje axiomático, que es de carácter sintáctico, es decir, encontrar un conjunto (mínimo o no) de fórmulas que puedan ser tomadas como **axiomas** (en realidad esquemas de axiomas), y una colección de **reglas de inferencia o de deducción** de modo que:

1) Los axiomas sean fórmulas válidas y las reglas de inferencia preserven la verdad,
2) solo fórmulas válidas sean deducidas de los axiomas, esta es la **condición de corrección o suficiencia del sistema axiomático** (lo que ya es garantizado por (1)), y
3) todas las fórmulas válidas sean deducidas de los axiomas, esta es la **condición de completitud del sistema axiomático** en una versión que llamaremos «débil».

- Usualmente son llamados «**teoremas**» las proposiciones deducidas de los axiomas, y simbolizaremos por $\vdash \boldsymbol{A}$ la expresión «***A* es un teorema**», luego, podemos formular las dos condiciones anteriores de la siguiente manera:

1) Todo teorema debe ser fórmula válida, es decir, $\vdash \boldsymbol{A} \Rightarrow \vDash \boldsymbol{A}$ (el sistema axiomático es suficiente), y
2) Toda fórmula válida debe ser teorema, es decir, $\vDash \boldsymbol{A} \Rightarrow \vdash \boldsymbol{A}$ (el sistema axiomático es **débilmente completo**).

El concepto de «consecuencia sintáctica»

- **Deducción a partir de premisas**

Sea Γ un conjunto (finito o infinito) de fórmulas (proposiciones) y *A* una fórmula, diremos que ***A* es consecuencia sintáctica de Γ**, lo que denotaremos por $\Gamma \vdash A$, si existe una secuencia finita de fórmulas A_1 , A_2 , … , A_n de modo que;

1) A_n es *A*;

2) Cada fórmula A_k de la secuencia es o un axioma o una premisa, es decir elemento de Γ, o es consecuencia inmediata por una de las reglas de inferencia de fórmulas anteriores en la secuencia.

- Para la lógica de primer orden tenemos como reglas de inferencia el conocido *modus ponens*, que es de carácter proposicional, y la regla de generalización dada por $A \vdash (\forall x)A$.
- Esa secuencia es llamada **deducción o prueba de *A* a partir de Γ**. Si Γ = $\varnothing$ tenemos $\vdash A$.

El camino de Henkin hacia el teorema de completitud fuerte

- El teorema de completitud débil (que es el que primero probó Gödel en 1930) tiene el siguiente enunciado, como ya vimos: $\vDash \boldsymbol{A} \Rightarrow \vdash \boldsymbol{A}$, que junto con la condición de suficiencia se expresa por $\vDash A \Leftrightarrow \vdash A$.
- El **teorema de completitud fuerte** es el enunciado $\Gamma \vDash \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \Gamma \vdash \boldsymbol{A}$. Nuevamente, como en el caso de la completitud débil, la implicación $\Leftarrow$, que usualmente se llama **teorema de corrección o suficiencia**, es trivial. Haremos un esbozo de los pasos esenciales de la prueba de la implicación $\Rightarrow$.
- Bajo la suposición de que $\Gamma \vDash A$ debemos probar que $\Gamma \vdash A$. Para eso, se prueba, primero, que:

  $\Gamma \vDash \boldsymbol{A}$ equivale a $\Gamma \cup \{\neg \boldsymbol{A}\}$ **no tiene modelo**, y que

  $\Gamma \vdash \boldsymbol{A}$ equivale a $\Gamma \cup \{\neg \boldsymbol{A}\}$ **es inconsistente**.
- Así, nuestro teorema de completitud fuerte se reduce a probar que:

  $\Gamma \cup \{\neg \boldsymbol{A}\}$ **no tiene modelo** $\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg \boldsymbol{A}\}$ **es inconsistente**.
- O en su forma general, el llamado **teorema de existencia de modelos**:

  Γ **es consistente** $\Rightarrow \Gamma$ **tiene modelo**.

El teorema de existencia de modelos

- El teorema de existencia de modelos afirma que si Γ es un conjunto consistente de fórmula, **existe un modelo** de Γ, es decir, un modelo que es el mismo para toda fórmula $A \in \Gamma$. Obviamente, si probamos eso para un conjunto Γ^* con $\Gamma^* \supseteq \Gamma$, también será válido para Γ. Γ^* es llamado **extensión** de Γ
- El primer paso, usado en la prueba de Henkin, es «construir» Γ^* de modo que sea una «**extensión de Henkin consistente maximal**».
- Una **extensión consistente maximal** puede ser construida por el llamado «**procedimiento de extensión de Lindenbaum**». Adolf Lindenbaum (1904-1941) fue un lógico y matemático polaco, colaborador de Tarski en el período de entre guerras en la Universidad de Varsovia. Esbozaremos aquí la construcción de Γ^* hecha por inducción finita.
- Primero tomamos una enumeración de todas las fórmulas del lenguaje: A_0, A_1, A_2, … , A_n, A_{n+1}, …, y definimos:

$\Gamma_0 = \Gamma$,

$\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{A_0\}$ si ese conjunto es consistente, y $\Gamma_1 = \Gamma_0$ si no lo es,

$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$ si ese conjunto es consistente, y $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ si no lo es,

- Finalmente se define $\mathbf{\Gamma^* = \cup_{n\geq 0}\, \Gamma_n}$.

Un modelo para Γ^*

- Ser una **extensión de Henkin** es un concepto más técnico y solo esbozaremos algunas de sus características.
- Primero debe ser observado que Γ^*, siendo consistente maximal, es cerrado deductivamente, es decir, $\Gamma^* \vdash A$ equivale a $A \in \Gamma^*$.
- Con eso, definimos: **Γ^* es una extensión de Henkin de Γ** si para cada proposición A de la forma $(\exists x)B(x)$ existe una constante individual c_A en el lenguaje tal que $\Gamma^* \vdash (\exists x)B(x) \rightarrow B(c_A)$. El indivíduo c_A es un «**testigo**» que realiza a existencia que está siendo afirmada. Lo mismo para las fórmulas cuantificacionales de segundo orden: para cada proposición A de la forma $(\exists X)B(X)$ existe un predicado constante F_A en el lenguaje tal que $\Gamma^* \vdash (\exists X)B(X) \rightarrow B(F_A)$.
- El método de Henkin garantiza que siempre se puede construir una extensión (consistente maximal) con esa propiedad, y para eso es necesario agregar al lenguaje suficientes constantes individuales y predicados constantes, es decir testigos, para ese efecto.
- En ese caso, un modelo $(U , \mathfrak{I})$ para Γ^* se obtiene tomando U como la colección de todas las constantes individuales necesarias, y $\mathfrak{I}$ como la colección de subconjuntos de U que se correspondan con los predicados constantes necesarios. Se observa que **$\mathfrak{I}$ no necesariamente coincide con $\wp(U)$**.
- Así, se prueba por inducción semiótica que **para toda proposición $A \in \Gamma^*$, $(U , \mathfrak{I})$ es modelo de A**. Veamos el caso que más interesa: se A es de la forma $(\exists X)B(X)$, entonces, por un lado, $\Gamma^* \vdash (\exists X)B(X)$ y, por outro lado, existe un predicado constante F_A en el lenguaje tal que $\Gamma^* \vdash (\exists X)B(X) \rightarrow B(F_A)$, luego, por *modus ponens*, $\Gamma^* \vdash B(F_A)$, lo que implica que $B(F_A) \in \Gamma^*$ por ser consistente maximal, de donde, por hipótesis inductiva, $(U , \mathfrak{I})$ es modelo de $B(F_A)$ y como $F_A \in \mathfrak{I}$ tenemos que $(U , \mathfrak{I})$ es modelo de $(\exists X)B(X)$.

Referencias

- Biografía en español: es.wikipedia.org/wiki/Leon_Henkin.
- L. Henkin. *A lógica e a matemática são idênticas?* Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, Curitiba, vol. 7, no. 3, p. 61-75, 1964 (traducido por Ayda Arruda, original en inglés de 1962).
- L. Henkin. ¿*Son la lógica y la matemática idénticas?* Boletín de Matemáticas, Univ. Nac. de Colombia, vol. 9, no. 2, p. 65-89, 1975.
- L. Henkin. *Verdade e demonstrabilidade*. In: **Filosofia da ciência** (S. Morgenbesser, org.). São Paulo: Ed. Cultrix, 1972, p. 55-64.
- L. Henkin. *Completude*. In: **Filosofia da ciência** (S. Morgenbesser, org.). São Paulo: Ed. Cultrix, 1972, p. 67-80.
- L. Henkin. *The discovery of my completeness proofs*. The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 2, no. 2, 1996, p. 127-158.
- J.C. Cifuentes. *Lógica de la teoría de subconjuntos fuzzy: el método de Kalmár-Henkin*. In: **Lógica, Lenguaje y Mente** (P. Quintanilla y D. Rosales, eds.). Lima: Fondo Editorial PUCP, 2011, p. 205-221. [**Este artículo fue inspirado en el método de Henkin para adaptarlo a un cierto tipo de lógicas difusas o *fuzzy***].

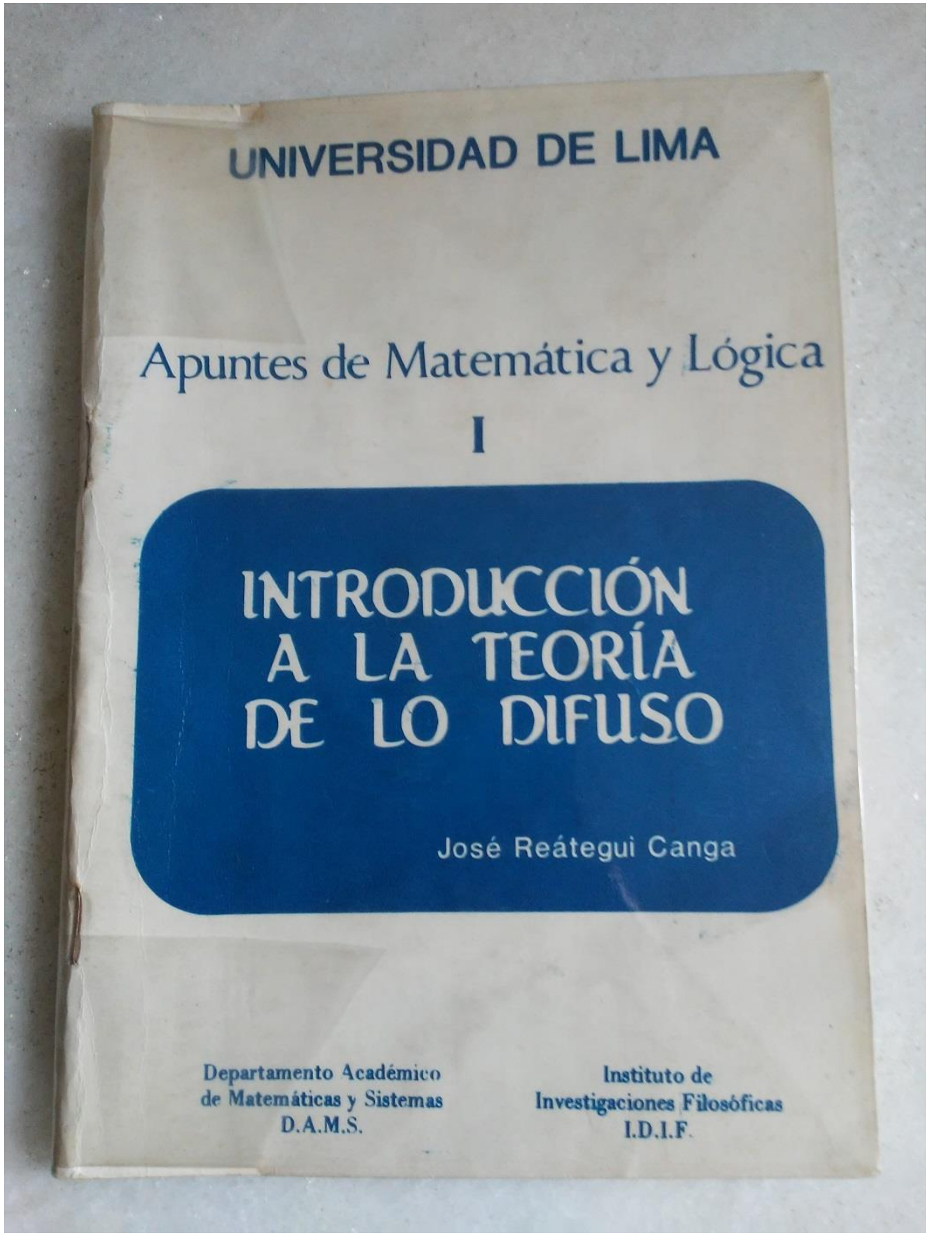
Una nota final sobre la lógica y la matemática de lo difuso

- Otro centenario: **Lofti Zadeh** (1921-2017), fue el iniciador de la teoría *fuzzy* o teoría de los conceptos vagos.
- Zadeh fue un matemático, ingeniero electrónico y científico de la computación americano, iniciador, en 1965, de la matemática y la lógica difusas (*fuzzy*).

Francisco Miró Quesada sobre la lógica de los conceptos vagos o lógica fuzzy

- «*[Hay] un aspecto sumamente importante de la relación entre la lógica y la realidad que aún no ha sido suficientemente estudiado: la vaguedad de los conceptos empíricos. Hay experiencias en las que no puede saberse si un objeto pertenece o no a un conjunto, o si una superficie es de un color o de otro (variación continua de colores), etc. En estos casos no pueden aplicarse con precisión los principios lógicos clásicos y es necesario elaborar un nuevo tipo de lógica*» (de *La filosofía de la lógica de N.C.A. Da Costa*, 1982).

El primer cursillo organizado en Lima titulado «**Introducción a la Teoría de lo Difuso**» fue realizado en 1983 a cargo del profesor José Reátegui Canga del Departamento de Matemáticas y Sistemas de la Universidad de Lima, y con el estímulo y apoyo firme del profesor Francisco Miró Quesada Cantuarias, en ese entonces Director del Instituto de Investigaciones Filosóficas de esa universidad. Sin duda, un emprendimiento con **espíritu visionario**, propio de Miró Quesada.



Un testimonio personal

- Las enseñanzas que recibí de Francisco Miró Quesada a través de seminarios y conferencias organizados por él, y algunos con la colaboración de José Reátegui, antes de mi partida para Brasil, fueron seminales en mi formación en Matemática y en Lógica, especialmente forjando mi interés en las aplicaciones de la lógica (por ejemplo, teoría de modelos y lógica algebraica) en la propia matemática, y una pequeña manifestación de esa influencia, además del artículo mencionado antes, son las siguientes dos tesis de maestría que tuve la suerte de asesorar en el posgrado en Matemática de la UFPR, sustentadas en 2005:
- Ana Cristina Corrêa Munaretto. «Da teoria de reticulados à geometria algébrica *fuzzy*».
- Sterliane Blanc Felizardo. «Aplicação da análise não-standard à teoria da medida: uma representação hiperfinita da medida de Lebesgue».